§ 3. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Дифференцирование суммы, произведения и частного

Теорема 1. *Если функции f и g дифференцируемы в точке x, то в этой точке дифференцируемы функции $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ (при условии, что $g(x) \neq 0$) и при этом*

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), \tag{1}$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x), \tag{2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0. \tag{3}$$

○ Обозначим

$$\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x) \quad \text{и} \quad \Delta g = g(x+\Delta x)-g(x).$$

Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x), \quad \frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x)$$

при $\Delta x \to 0$, так как существуют $f'(x)$ и $g'(x)$. Кроме того,

$$f(x+\Delta x) = f(x)+\Delta f, \quad g(x+\Delta x) = g(x)+\Delta g,$$

где $\Delta f \to 0$, $\Delta g \to 0$, так как функции f и g непрерывны в точке x.

1) Если $y = f(x)+g(x)$, то

$$\Delta y = f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x) = \Delta f+\Delta g,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Правая часть этой формулы имеет при $\Delta x \to 0$ предел, равный $f'(x)+g'(x)$. Поэтому существует предел левой части, который по определению равен $(f(x)+g(x))'$. Формула (1) доказана.

2) Если $y = f(x)g(x)$, то

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x) = \\ &= (f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g)-f(x)g(x) = \\ &= f(x)\Delta g+g(x)\Delta f+\Delta f\Delta g,\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}+g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g.$$

Отсюда следует формула (2), так как

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x), \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x), \quad \Delta g \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

3) Если $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, то

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)},$$

или

$$\Delta y = \frac{(\Delta f)g(x) - (\Delta g)f(x)}{g(x)g(x+\Delta x)},$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x}f(x)\right)\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}.$$

Переходя к пределу в этом равенстве и учитывая, что $g(x + \Delta x) \to g(x)$ при $\Delta x \to 0$, где $g(x) \neq 0$, получаем формулу (3). ●

Следствие 1. *Если функция f дифференцируема в точке x и C — постоянная, то*

$$(Cf(x))' = Cf'(x),$$

т. е. постоянный множитель можно выносить из-под знака дифференцирования.

Следствие 2. *Если функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ дифференцируемы в точке x, а $C_1, \ldots, C_n$ — постоянные, то*

$$(C_1f_1(x) + \ldots + C_nf_n(x))' = C_1f_1'(x) + \ldots + C_nf_n'(x).$$

Пример 1. Найти производную функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$;

3) $f(x) = 3e^x - 4\ln x$; 3) $f(x) = 4\log_3 x - 2^x$.

△ 1) Используя формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$ и теорему 1, находим

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1.$$

2) Так как

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

то

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}.$$

Пример 2. Найти $f'(x)$, если:

1) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$; 2) $f(x) = x^2 \sin x$;

3) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+4}$;

△ 1) Используя правило дифференцирования частного (формула (3)), получаем

$$f'(x) = \frac{(x-2)'(x+2)-(x-2)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

2) По формуле (2) находим

$$f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x.$$

3) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+4)-x^3\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{x^4+12x^2}{(x^2+4)^2}$.

3. Дифференцирование обратной функции

Теорема 3. *Пусть $y = f(x)$ — непрерывная, возрастающая или убывающая на интервале (a, b) функция; $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Пусть $x = g(y)$, где $\alpha < y < \beta$, — обратная к $f(x)$ функция (гл. IX, § 4, теорема 4).*

Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) и $f'(x) \neq 0$, то функция $x = g(y)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(\alpha; \beta)$, причем

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{16}$$

○ Докажем формулу (16), предполагая, что $g(y)$ — дифференцируемая функция. Из определения взаимно обратных функций (гл. III, § 4) следует, что

$$f(g(y)) = y, \quad y \in (\alpha; \beta). \tag{17}$$

Дифференцируя тождество (17) и используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$f'(g(y))g'(y) = 1,$$

откуда следует, что

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Заменяя в этом равенстве y на x, а x на y, получаем

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(g(x))}. \tag{18}$$

●

Пример 10. Доказать формулы

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1, \tag{19}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1, \tag{20}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

△ 1) Если $y = g(x) = \arcsin x$, где $|x| < 1$, то обратная функция $x = f(y) = \sin y$, где $|y| < \frac{\pi}{2}$. По формуле (18) находим

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Так как $\sin y = x$ и $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Следовательно, справедлива формула (19).

2) Если $y = \operatorname{arctg} x$, где $x \in \mathbb{R}$, то $x = \operatorname{tg} y$, где $|y| < \frac{\pi}{2}$. Применяя формулу (18), получаем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y,$$

где

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Формула (21) доказана.

4. Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
$x^n,\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$	$a^x \ln a$
$e^x,\ x \in \mathbb{R}$	e^x

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x,\ x \in \mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x,\ x \in \mathbb{R}$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x,\ x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

2. Дифференцирование сложной функции

Теорема 2. *Если функции $y=\varphi(x)$ и $z=f(y)$ дифференцируемы соответственно в точках x_0 и y_0, где $y_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $z=f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем*

$$z'(x_0)=f'(y_0)\varphi'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \tag{6}$$

⋆○Из существования производных $\varphi'(x_0)$ и $f'(y_0)$ следует (§ 1, п. 2), что функции $y=\varphi(x)$ и $z=f(y)$ непрерывны соответственно в точках x_0 и y_0, где $y_0=\varphi(x_0)$.

Тогда сложная функция $z=f(\varphi(x))$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке (гл. IX, § 4, п. 3).

Так как функции $z=f(y)$ и $y=\varphi(x)$ дифференцируемы в точках y_0 и x_0, то из определения производной (§ 1, п. 2) следует, что их приращения представимы в виде

$$\Delta z=f'(y_0)\Delta y+\varepsilon(\Delta y)\cdot\Delta y, \quad \varepsilon(\Delta y)\to 0 \quad \text{при} \quad \Delta y\to 0, \tag{7}$$

$$\Delta y=\varphi'(x_0)\Delta x+\varepsilon_1(\Delta x)\cdot\Delta x, \quad \varepsilon_1(\Delta x)\to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x\to 0. \tag{8}$$

Функция $\varepsilon(\Delta y)$ не определена при $\Delta y=0$. Доопределим эту функцию в точке 0, положив $\varepsilon(0)=0$. Тогда равенство (7) окажется верным и при $\Delta y=0$.

Считая, что в равенстве (8) приращение Δy определяется приращением Δx, выразим Δz через Δx, подставляя Δy из равенства (8) в равенство (7).

Тогда

$$\Delta z=f'(y_0)(\varphi'(x_0)\Delta x+\varepsilon_1(\Delta x)\cdot\Delta x)+\varepsilon(\Delta y)\cdot\Delta y,$$

или

$$\Delta z=f'(y_0)\varphi'(x_0)\Delta x+f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x)\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta y)\cdot\Delta y. \tag{9}$$

Поделив обе части равенства (9) на Δx, где $\Delta x\neq 0$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=f'(y_0)\varphi'(x_0)+f'(y_0)+\varepsilon_1(\Delta x)+\varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{10}$$

Так как $\varepsilon_1(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$ (равенство (8)), а $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\varphi'(x_0)$, то, переходя к пределу в равенстве (10) при $\Delta x\to 0$, получаем формулу (6). ●⋆

З а м е ч а н и е 1. Условие $\varepsilon(0)=0$ связано с тем, что Δy может оказаться равным нулю при $\Delta x\neq 0$.

З а м е ч а н и е 2. Согласно теореме 2 для нахождения производной сложной функции $z=f(y)=f(\varphi(x))$ в точке x нужно перемножить производные $f'(y)$ и $y'=\varphi'(x)$, заменив y на $\varphi(x)$.

Правило дифференцирования сложной функции можно записать так:

$$z'_x=z'_y\cdot y'_x.$$
